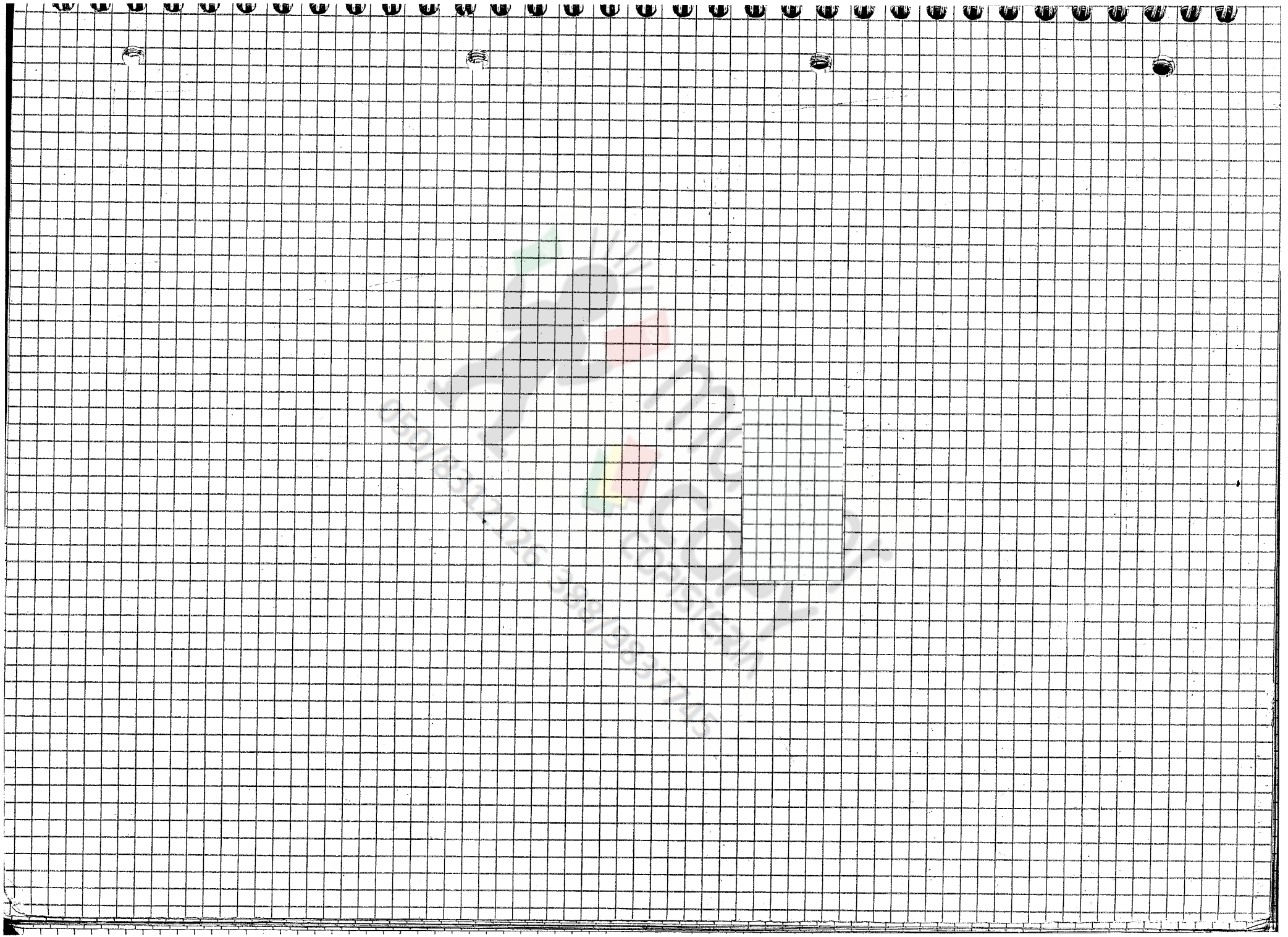


RAPPRESENTAZIONE DI NUMERI

$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\beta \in \mathbb{N}, \beta > 1$ $0 \le \alpha_i \le \beta - 1$ $i = 1, 2, 3 \dots$ $b \in \mathbb{Z}$ $x = \text{segn}(x)\, \beta^b \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \beta^{-i}}_{\text{MANTISSA}}$ VIRGOLA MOBILE

β BASE b ESPONENTE di CIFRE

$\text{segn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ $x = \text{segn}(x)\, \beta^b (\alpha_1 \beta^{-1} + \alpha_2 \beta^{-2} + \dots)$

① $\alpha_1 \neq 0$

② $\nexists\, k \in \mathbb{N} : \alpha_i = \beta - 1 \ \forall i > k$ ← UNICITÀ DELLA RAPPRESENTAZIONE

$1,29\overline{9}$ NO! $\rightarrow \frac{129-12}{90} = \frac{117}{90} = 1,3$ ($1,29$ è doppione di $1,3$)

$\beta^{-1} \le \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \beta^{-i} \le \sum_{i=1}^{\infty} (\beta-1)\beta^{-i} = (\beta-1)\sum_{i=1}^{\infty} \beta^{-i} = (\beta-1)\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^3} + \dots\right) = (\beta-1)\frac{1}{1-1/\beta}\cdot\frac{1}{\beta} = (\beta-1)\frac{\beta}{\beta-1}\cdot\frac{1}{\beta} = 1$ → estremo superiore

β^{-1} minimo (valore più piccolo che può avere la mantissa) — progressione geometrica

LA MANTISSA È NORMALIZZATA

$\tilde{x} = \text{segn}(x)\, \beta^b \sum_{i=1}^{u} \alpha_i \beta^{-i}$ RAPPRESENTAZIONE FINITA

u cifre della mantissa

↳ possiamo essere ad esempio di $0,9\overline{87} \cdot 10^0 \rightarrow 1,0 \rightarrow 0,1 \cdot 10^1$ (può cambiare anche b)

$\text{fl}(x) = \begin{cases} \text{tr}(x) & \alpha_{u+1} < \beta/2 \\ \text{segn}(x)\beta^b\left(\sum_{i=1}^{u} \alpha_i \beta^{-i} + \beta^{-u}\right) & \beta/2 \le \alpha_{u+1} < \beta \end{cases}$ $\text{tr}(x) = \text{segn}(x)\beta^b \sum_{i=1}^{u} \alpha_i \beta^{-i}$

$|x - \text{tr}(x)| \le \beta^{b-u}$

$|x - \text{fl}(x)| \le \frac{1}{2}\beta^{b-u}$

$\text{fl}(x) = \text{segn}(x)\beta^b \sum_{i=1}^{u} \alpha_i \beta^{-i} + 1$ $\quad \text{card}(\mathbb{M}) = 2(\beta^u - \beta^{u-1})(U - L + 1) + 1$

numero di valori assumibili $(\beta-1)\beta^{u-1}$ $\quad L \le b \le U$ $\quad F(\beta, u, L, U)$ (u: cifre della mantissa)

$F(10, 3, -3, 3)$

$|x - \text{fl}(x)| \le \frac{1}{2}\beta^{b-u}$

ERRORE ASSOLUTO: errore effettivo tra la misura esatta e quella approssimata $\quad |x - \text{fl}(x)| \le \frac{1}{2}\beta^{b-u}$

ERRORE RELATIVO: errore assoluto diviso la grandezza che si vuole misurare $\quad \left|\frac{x - \text{fl}(x)}{x}\right| < \frac{\frac{1}{2}\beta^{b-u}}{\beta^{b-1}} = \frac{1}{2}\beta^{1-u}$ ← PRECISIONE DI MACCHINA

dipende solo da β e da u

$F(10, 4, -49, 49)$ $\quad x = 0,99996 \cdot 10^{49} \rightarrow 1,0 \cdot 10^{49}$ $\quad \text{fl}(x) = 0,1 \cdot 10^{50}$ → troppo grande da rappresentare

$x = 0,00213 \cdot 10^{-48}$ $\quad \text{fl}(x) = 0,213 \cdot 10^{-50}$

$f(x_1 \dots x_n)$ $\quad P_0 = (x_1^{(0)} \dots x_n^{(0)})$ $\quad P = (x_1 \dots x_n)$

$f(P_0)$ → non è precisa, si va a calcolare $f_a(P_1)$, dove P_1 è un altro punto

$D = \{P \in \mathbb{R}^n \mid a_i \le x_i \le b_i \ \ i = 1, 2 \dots\}$ $\quad P_0 \in D$ $\quad P_1 \in D$

L'INSIEME DI INDETERMINAZIONE

lo più è piccolo, più la misura è precisa

$P_2 = (\sqrt{2}, \pi)$ $\quad D = [1, 2] \times [3, 4]$

$\delta_f = f_a(P_1) - f_a(P_0) = \underbrace{f_a(P_1) - f(P_1)}_{\text{ERRORE ASSOLUTO ALGORITMICO}} + \underbrace{f(P_1) - f(P_0)}_{\text{ERRORE ASSOLUTO DEI DATI}}$ $\quad \delta_f = \delta_a + \delta_d$ ERRORE ASSOLUTO

δ_a: calcolatore dell'algoritmo

δ_d: calcolatore del punto

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

$f(P_1) - f(P_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i^{(1)} - x_i^{(0)}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\delta_{x_i} = \sum K_{x_i}\delta_{x_i} = \delta_d$

$K_{x_i} = \partial f / \partial x_i$ COEFFICIENTE DI AMPLIFICAZIONE

$|\delta_d| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\delta_{x_i}\right| \le \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| |\delta_{x_i}|$ $\quad A_{x_i} = \sup_{P \in D}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|$ $\quad |\delta_d| \le \sum_{i=1}^{n} A_{x_i}|\delta_{x_i}|$ $\quad |\delta_f| \le |\delta_d| + |\delta_a|$

$f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ $\quad P_0 = (\sqrt{2}, \sqrt{7})$ $\quad \sqrt{2} = 1,414213$ $\quad \sqrt{7} = 2,645751$ $\quad D = [1,4; 1,5] \times [2,6; 2,7]$ $\quad |\delta_a| \le \frac{1}{2}10^{-2}$ ×

$|\delta_{x_1}| \le \frac{1}{2}10^{-3}$

$|\delta_{x_2}| \le \frac{1}{2}10^{-3}$

$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2$ $\quad A_{x_1} = 2,7$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1$ $\quad A_{x_2} = 1,5$

$|\delta_f| \le |\delta_a| + |\delta_d| = \frac{1}{2}\cdot 10^{-2} + 2,7 \cdot \frac{1}{2}10^{-3} + 1,5 \cdot \frac{1}{2}\cdot 10^{-3} = 0,00771$

$P_1 = (1,414; 2,646)$ $\quad x_1^{(1)} \cdot x_1^{(0)} = 3,741444$ $\quad f_a(P_1) = 3,74$ $\quad f(P_0) = 3,741656$ $\quad 0,000165$

$P_0 = (\pi, 4/3)$ $\quad D = [3,4) \times [1,2]$ $\quad |f_a(P_1) - f_a(P_0)| \le 10^{-2}$ $\quad \partial f/\partial x_1 = x_2$ $\quad \partial f/\partial x_2 = x_1$ $\quad |\delta_f| \le |\delta_a| + |\delta_d| \le 10^{-2}$ $\quad |\delta_a| \le \frac{1}{2}10^{-2}$ $\quad |\delta_d| \le \frac{1}{2}10^{-2}$

$|\delta_d| \le A_{x_1}|\delta_{x_1}| + A_{x_2}|\delta_{x_2}| \le \frac{1}{2}10^{-2}$ $A_{x_1}|\delta_{x_1}| \le \frac{1}{4}10^{-2}$ $A_{x_1}=2$ $|\delta_{x_1}| \le \frac{1}{8}10^{-2} \to$ tx $(\pi)^{30}$ $P_1 = (3,14, -1,333)$
$A_{x_2}|\delta_{x_2}| \le \frac{1}{4}10^{-2}$ $A_{x_2}=4$ $|\delta_{x_2}| \le \frac{1}{16}10^{-2} \to$ tx $(4/3)^{30}$ $\tilde{f}_a(P_1) = 4,19$
$\tilde{f}(P_0) = 4,188 + 9$
$0,0012$

$\varepsilon_f = \frac{\tilde{f}_a(P_1) - f(P_1)}{f(P_1)}$ $\varepsilon_a = \frac{\tilde{f}_a(P_1) - f(P_1)}{f(P_1)}$ $\varepsilon_d = \frac{f(P_1) - f(P_0)}{f(P_1)}$ $\varepsilon_p = \varepsilon_a + \varepsilon_d + \varepsilon_a\varepsilon_d \to$ trascurabile

$\varepsilon_p \simeq \varepsilon_a + \varepsilon_d$ ERRORE RELATIVO
ERRORE ALGORITMICO/DEI DATI

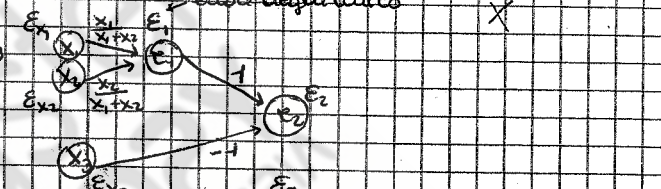
$\frac{\tilde{f}_a(P_1) - f(P_1)}{f(P_1)} + \frac{f(P_1) - f(P_0)}{f(P_0)} + \frac{(\tilde{f}_a(P_1) - f(P_1))(f(P_1) - f(P_0))}{f(P_1) f(P_0)} = \frac{\tilde{f}_a(P_1)f(P_0) - f(P_1)f(P_0) + f(P_1)f(P_0) - f(P_1)f(P_1) + \tilde{f}_a(P_1)f(P_1) - f(P_1)f(P_1) - \tilde{f}_a(P_1)f(P_0) + f(P_1)f(P_0)}{f(P_1)f(P_0)} =$

$= \frac{\tilde{f}_a(P_1)f(P_0) - f(P_0)f(P_1)}{f(P_0)f(P_1)} = \frac{\tilde{f}_a(P_1) - f(P_0)}{f(P_0)} = \varepsilon_p$

$\varepsilon_d = \delta_d / f(P_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta_{x_i} / f(P_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{x_i^{(0)}}{f(P_0)} \frac{\delta_{x_i}}{x_i^{(0)}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{x_i^{(0)}}{f(P_0)} \varepsilon_{x_i}$
COEFFICIENTI DI AMPLIFICAZIONE K_i

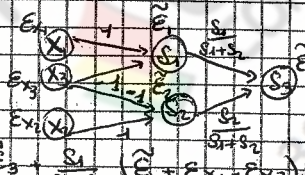
	δ_d	ε_d
x_1+x_2	$\delta_{x_1} + \delta_{x_2}$	$\frac{x_1}{x_1+x_2}\cdot\varepsilon_{x_1} + \frac{x_2}{x_1+x_2}\cdot\varepsilon_{x_2}$ ← escluso per il problema di cancellazione
x_1-x_2	$\delta_{x_1} - \delta_{x_2}$	$\frac{x_1}{x_1-x_2}\cdot\varepsilon_{x_1} - \frac{x_2}{x_1-x_2}\cdot\varepsilon_{x_2}$
$x_1 \cdot x_2$	$x_2\delta_{x_1} + x_1\delta_{x_2}$	$\varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_2}$
x_1/x_2	$\frac{1}{x_2}\delta_{x_1} - \frac{x_1}{x_2^2}\delta_{x_2}$	$\varepsilon_{x_1} - \varepsilon_{x_2}$

$f(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1+x_2}{x_3}$ ① $z_1 = x_1+x_2$ $z_2 = z_1/x_3$



$\varepsilon_p = \varepsilon_{z_2} = \varepsilon_2 + 1\cdot\varepsilon_{z_1} - 1\cdot\varepsilon_{x_3} = \varepsilon_2 - \varepsilon_{x_3} + \varepsilon_1 + \frac{x_1}{x_1+x_2}\varepsilon_{x_1} + \frac{x_2}{x_1+x_2}\varepsilon_{x_2} = \underbrace{\varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \frac{x}{x_1+x_2}\varepsilon_{x_1} + \frac{x_2}{x_1+x_2}\varepsilon_{x_2} - \varepsilon_{x_3}}_{\varepsilon_a}$

② $s_1 = x_1/x_3$ $s_2 = x_2/x_3$ $s_3 = s_1 + s_2$



$\frac{s_1}{s_1+s_2} = \frac{x_1}{x_3}\cdot\frac{x_3}{x_1+x_2}$ $\frac{s_2}{s_1+s_2} = \frac{x_1}{x_3}\cdot\frac{x_3}{x_1+x_2}$

$\tilde{\varepsilon}_p = \varepsilon_{z_2} = \tilde{\varepsilon}_3 + \frac{s_1}{s_1+s_2}\tilde{\varepsilon}_1 + \frac{s_2}{s_1+s_2}\tilde{\varepsilon}_2 = \tilde{\varepsilon}_3 + \frac{s_1}{s_1+s_2}(\tilde{\varepsilon}_1 + \varepsilon_{x_1} - \varepsilon_{x_3}) + \frac{s_2}{s_1+s_2}(\tilde{\varepsilon}_2 - \varepsilon_{x_2} - \varepsilon_{x_3}) =$

$= \tilde{\varepsilon}_3 + \frac{x_1}{x_1+x_2}\tilde{\varepsilon}_1 + \frac{x_1}{x_1+x_2}\varepsilon_{x_1} - \frac{x_1}{x_1+x_2}\varepsilon_{x_3} + \frac{x_2}{x_1+x_2}\tilde{\varepsilon}_2 - \frac{x_2}{x_1+x_2}\varepsilon_{x_2} - \frac{x_2}{x_1+x_2}\varepsilon_{x_3}$

$= \underbrace{\frac{x_1}{x_1+x_2}\tilde{\varepsilon}_1 + \frac{x_2}{x_1+x_2}\tilde{\varepsilon}_2 + \tilde{\varepsilon}_3}_{\tilde{\varepsilon}_a} + \underbrace{\frac{x_1}{x_1+x_2}\varepsilon_{x_1} + \frac{x_2}{x_1+x_2}\varepsilon_{x_2} - \varepsilon_{x_3}}_{\varepsilon_d}$ → è lo stesso di prima → non dipende dall'algoritmo

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

MATRICI

$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ $a \in \mathbb{C}^n$ $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & d_m \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ QUADRATA DIAGONALE

$L = \begin{pmatrix} e_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ e_{n1} & \cdots & e_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ TRIANGOLARE INFERIORE $R = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & x_{nn} \end{pmatrix}$ TRIANGOLARE SUPERIORE

$A^{-1}A = AA^{-1} = I$

MINORE DI ORDINE k: data una matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ed un intero $k \le \min\{m,n\}$, si dice minore di ordine k il determinante della matrice ottenuta da A prendendo tutti gli elementi sulla intersezione di k righe e k colonne fisse

MINORE PRINCIPALE DI ORDINE k: data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, si dice minore principale di ordine k il determinante della sottomatrice di ordine k estratta da A e avente diagonale formata da elementi della diagonale principale di A

$A \in \mathbb{C}^{u \times k}$
$B \in \mathbb{C}^{k \times u}$
$A \cdot B \in \mathbb{C}^{u \times u}$

$\det(A \cdot B) = \begin{cases} 0 & u > k \\ \det(A)\det(B) & u = k \\ \det(A)\det(B) & k > u \end{cases}$

TEOREMA DI BINET

→ somma dei prodotti di tutti i possibili minori di ordine massimo di A per i corrispondenti minori di B

$\binom{u}{k} = s$

$X = (x_1 \dots x_u)$ $X^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_u \end{pmatrix}$ **MATRICE TRASPOSTA**

A^H **MATRICE AGGIUNTA** coniugata della trasposta di A

$P \in \mathbb{C}^{u \times u}$ **MATRICE DI PERMUTAZIONE**: matrice quadrata ottenuta dalla matrice identità permutando l'ordine delle righe o delle colonne $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $u!$ matrici di permutazione

$P^T P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Le righe di P^T sono le colonne di P

$P^T = P^{-1}$ $P^T P = P P^T = \mathbb{1}$ **P MATRICE ORTOGONALE**: è inversa e uguale alla trasposta

AP $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $P = \begin{matrix} e_2 & e_3 & e_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$AP = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ → permuta le **colonne** nel modo in cui K è permutata I per costruire P

$P^T A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ → permuta le **righe** nel modo in cui K è permutata I per costruire P

$P^T A P = B$ → permuta le **righe** e le **colonne** nel modo in cui K è permutata I per costruire P

A e B hanno lo stesso insieme di numeri che si compongono

MATRICE PARTIZIONATA A BLOCCHI

$A = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$

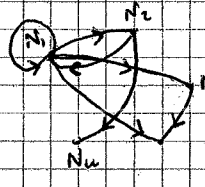
$A = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right)$ → non è un partizionamento a blocchi, perché il numero di righe di A_{11} deve essere uguale a quello di A_{12}

$A \in \mathbb{C}^{u \times u}$ se $\exists P \in \mathbb{C}^{u \times u}$: $P^T A P = B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ B_{11}, B_{22} **QUADRATE** → **A RIDUCIBILE**

A IRRIDUCIBILE se $\nexists P$ per cui A è riducibile

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ → NON È RIDUCIBILE!! (non sono quadrati)

GRAFO ORIENTATO **NC NODI**

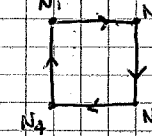


$a_{ij} \begin{cases} = 0 & \rightarrow \text{non si fa nulla} \\ \neq 0 & \rightarrow \text{si traccia un cammino orientato dal nodo con indice } i \text{ a quello di indice } j \quad N_i \rightarrow N_j \end{cases}$

FORTEMENTE CONNESSO: da ogni nodo posso raggiungere tutti i nodi del grafo con cammini diretti o composti

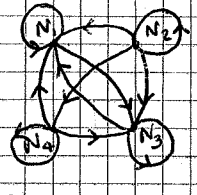
⇕ **IRRIDUCIBILE**

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



→ Fortemente connesso → irriducibile $\begin{pmatrix} 0 & * & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & * \\ * & & & \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$



← nodi collegati	NC	NS ← nodi scollegati
N_1	$N_1 N_3$	$N_2 N_4$
N_2	$N_2 N_3 N_4$	
N_3	$N_1 N_3$	$N_2 N_4$
N_4	$N_1 N_3 N_4$	N_2

→ matrice riducibile

$P = \begin{matrix} \\ e_1 \\ e_3 \\ e_2 \\ e_4 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} N_1 & N_3 & N_2 & N_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$

$P^T A P =$

$P^T A P = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&0&-5&0\\3&1&4&2\\6&0&7&0\\-2&0&-3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&-5&0&0\\3&4&1&2\\6&7&0&0\\-2&-3&0&-1\end{pmatrix} =$

→ non è riducibile (tutti gli elementi fuori diagonale diversi da 0)

$= \left(\begin{array}{cc:cc}-4&-5&0&0\\6&7&0&0\\\hdashline 3&4&1&2\\-2&-3&0&-1\end{array}\right)$ Se è riducibile deve diagonale sono irriducibili ⇒ MATRICE RIDOTTA

Adesso si può ridurre ancora, considerando solo blocchi diagonali:

$\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}$ (S2) (S1) $P_2 = (e^{(1)}\ e^{(2)}\ e^{(4)}\ e^{(3)})$ $P_2^T (P^T A P) P_2 = P_2^T \begin{pmatrix}-4&-5&0&0\\6&7&0&0\\3&4&2&1\\-2&-3&-1&0\end{pmatrix} =$

$= \left(\begin{array}{cc:cc}-4&-5&0&1&0\\6&7&0&0\\\hdashline 3&4&-1&0\\-2&-3&2&1\end{array}\right)$ ⇒ forma ridotta! → ci si poteva direttamente fare $P = P_{12} \cdot P_2$

$Ax = b$ A riducibile $B = P^T A P = \begin{pmatrix}B_{11}&0\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}$ $P^T A x = P^T b$ $\underbrace{P^T A P}_{B} \underbrace{P^T x}_{y} = \underbrace{P^T b}_{c}$ $By = c$ $\begin{pmatrix}B_{11}&0\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$

$\begin{cases}B_{11}y_1 = c_1 \to y_1\\ B_{21}y_1 + B_{22}y_2 = c_2 \to B_{22}y_2 = c_2 - B_{21}y_1\end{cases}$ $y = P^T x$ $x = Py$

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ λ AUTOVALORE $Ax = \lambda x$ $x \neq 0$ $Ax - \lambda x = 0$ $(A - \lambda I)x = 0$ → poiché x non deve essere $= 0$, $\det$ deve essere $= 0$

$\det(A - \lambda I)$ POLINOMIO CARATTERISTICO $\det(A - \lambda I) = 0$ EQUAZIONE CARATTERISTICA

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \sigma_1 \lambda^{n-1} + (-1)^{n-2} \sigma_2 \lambda^{n-2} + \dots + (-1)^1 \sigma_{n-1} \lambda + \sigma_n$ dove σ_i sono ricavati fa somma dei minori principali di ordine i.

$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (= $tr(A)$) ← TRACCIA (somma degli elementi diagonali) $\sigma_n = \det(A)$ (= somma dei determinanti principali di ordine n)

$\lambda_1 \dots \lambda_n$ autovalori

$P(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$ $\sigma_n = (-1)^n (-\lambda_1)(-\lambda_2) \dots (-\lambda_n) = (-1)^n (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n (-1)^{2n} \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n =$ ← termine noto

$= \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \Rightarrow \det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ → poiché A invertibile $\lambda_1 \dots \lambda_n \neq 0$

coefficiente $\lambda^{n-1} \longrightarrow (-1)^{n-1} \sigma_1' = (-1)^n (-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \dots - \lambda_n) = (-1)^{n+1} (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) \Rightarrow \sigma_1' = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$

RAGGIO SPETTRALE: $\rho(A) = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i|$ → MASSIMO MODULO AUTOVALORE

↳ DEVE NON NEGATIVO

$Ax = \lambda x$ $A^2 x = A\lambda x$ $A^2 x = \lambda A x$ $A^2 x = \lambda^2 x$ $A^3 x = \lambda^3 x$ $A^k x = \lambda^k x$ $k \in \mathbb{N}$ $k \in \mathbb{Z}$ (se $A \in$ invertibile)

$x = \lambda A^{-1} x$ $\frac{1}{\lambda} x = A^{-1} x$ $\frac{1}{\lambda^2} x = A^{-2} x$

$A = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ $\lambda^2 = -1$ $Ax = \lambda x$ $\lambda = \pm i$ $y = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $Ax = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ → non vale il viceversa (autovettori non uguali degli autovalori di A^2 uguale dello stesso autovettore)

$J = \begin{pmatrix}0&&&1\\&\ddots&\iddots&\\&\iddots&\ddots&\\1&&&0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $J^{-1} = J^T$ $J^2 = I$ $tr(J) = \begin{cases}1 & n \text{ dispari}\\ 0 & n = 2k\end{cases}$ $\lambda_1 - \lambda_{n+1} = 1$ $\lambda_{n+1} - \lambda_n = -1$ K autovalori $= 1$, K autovalori $= -1$

$\lambda_1 - \lambda_n = -1$ $\lambda_{n+1} - \lambda_{2n} = -1$

TRASFORMAZIONE PER SIMILITUDINE

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $\det(S) \neq 0$ $B = S^{-1} A S$ $\det(BB - \lambda I) = \det(S^{-1} A S - \lambda S^{-1} I S) =$

$A \in B$ MATRICI SIMILI $= \det(S^{-1}(A - \lambda I) S) = \det(S^{-1}) \det(A - \lambda I) \det(S) =$

$= \det(A - \lambda I)$ → gli autovalori di A e B sono gli stessi

$A = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $B = S^{-1} A S$

DUE MATRICI SIMILI HANNO GLI STESSI AUTOVALORI, DUE MATRICI CON GLI STESSI AUTOVALORI NON È DETTO CHE SIANO SIMILI.

SE UNA MATRICE È RIDUCIBILE, È SIMILE A QUELLA DI PARTENZA

$B = P^T A P = \begin{pmatrix}B_{11}&0\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}$

$S^{-1} A S = D = \begin{pmatrix}d_{11}&&0\\&\ddots&\\0&&d_{nn}\end{pmatrix}$ A DIAGONALIZZABILE $d_{ij} = \lambda_i$ $S = X = (x^{(1)} \dots x^{(n)})$

$\alpha(\lambda_i)$ MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA $\sum \alpha(\lambda_i) = n$

$\gamma(\lambda_i)$ MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA (autovettori indipendenti sono associati all'autovalore λ_i) $\gamma(\lambda_i) \leq \alpha(\lambda_i) \leq n$

⇒ A DIAGONALIZZABILE ⇔ $\alpha(\lambda_i) = \gamma(\lambda_i)$ $\gamma(\lambda_i) = n - r(A - \lambda_i I)$